# Лекция ПМТК. Использование условия Гейзенберга-Лакса для нестационарной системы дифференциальных уравнений второго порядка

Следует отметить, что в теории колебаний в силу закона Ньютона возникают системы дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Пусть система уравнений приводится к виду



И пусть при этом матрица **A**(t) удовлетворяет условию Гейзенберга-Лакса. В этом случае преобразование приводит систему к системе с постоянными коэффициентами.





где **L** - некоторая постоянная матрица.











Действительно. Дифференцируя соотношение по времени, имеем



С другой стороны, учитывая , ,



Следовательно,



Получили приведенную систему - линейную систему дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

## 6.2. Задача динамики материальной точки в центральном гравитационном поле. Физический смысл преобразования приведения

Рассмотрим задачу динамики материальной точки, находящейся в поле притягивающего гравитационного центра. Эта задача играет роль “нулевого приближения” при анализе динамики спутника Земли, служащего одной из реперных точек современных систем определения местоположения. Векторные уравнения этой задачи имеют вид



Здесь GM - геоцентрическая гравитационная постоянная ( ), **r** - радиус-вектор точки ().

В скалярной форме уравнения движения точки в поле притягивающего центра представляются в виде



Система уравнений имеет следующее частное решение



Здесь a - радиус окружности, по которой движется точка,  - угловая скорость вращения радиуса - вектора точки.

Вводя переменные



представим систему в безразмерном виде



Решение запишется следующим образом



Предположим теперь, что истинное движение точки не совпадает с выписанным частным решением, а незначительно (по крайней мере, на некотором временном интервале) отличается от него.



Подставляя соотношения в уравнения и пренебрегая нелинейными по  членами уравнений, получим



Или



Прежде всего обратим внимание на след матрицы системы - сумму элементов матрицы , расположенных на главной диагонали. Его постоянство - необходимое требование для выполнения условия Гейзенберга-Лакса. В данном случае след равен единице.

Характеристическая матрица системы имеет вид



Характеристическое уравнение



Корни характеристического уравнения  постоянны (матрица **A**(t) переменна, но изоспектральна) и можно надеяться на выполнение условия Гейзенберга-Лакса.

Найдем матрицу **L**. Для этого выпишем собственные векторы матрицы **A**(t). В качестве собственных векторов можно взять векторы, пропорциональные столбцам матрицы **F**, присоединенной к характеристической матрице.

Имеем



Нормируя первый столбец матрицы , положим



Используя соотношение , имеем (для вектора )



Положим



При таком выборе матрицы **L** условие будет удовлетворено. Проверяя выполнение условия Гейзенберга-Лакса с матрицей **L** из , убеждаемся в его выполнении.

Таким образом, с помощью замены переменных



система , в соответствии с , приводится к системе с постоянными коэффициентами



В рассматриваемой задаче преобразование Ляпунова к системе с постоянными коэффициентами так же, как и в первой модельной задаче, представляет собой плоский разворот. Координатные оси , в которых система стационарна, поворачиваются относительно исходных осей  против часовой стрелки на угол .

Характеристическое уравнение системы



имеет два нулевых и два чисто мнимых корня.

Соответствующая системе - матрица имеет естественную нормальную форму вида



Следовательно, один из инвариантных множителей имеет кратный нулевой корень. Соответствующий этому корню модальный столбец имеет растущие линейно по времени компоненты. Стало быть, если не предпринять специальные усилия по наблюдению за вектором состояния и управлению данной системой, возмущенное движение материальной точки в центральном поле сил в неподвижной системе координат может существенно отличаться от решения системы .